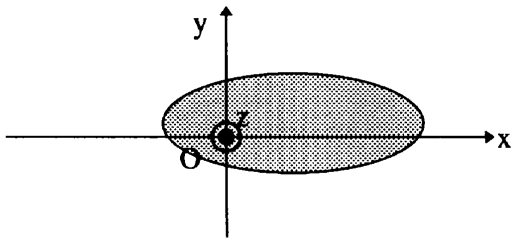
MÉCANIQUE DES FLUIDES.

Après une étude cinématique très succincte relative à deux écoulements particuliers et qui n'est qu'un outil pour la suite, cette partie propose une modélisation de l'écoulement de l'air autour d'une aile afin d'en tirer quelques conséquences sur les actions qu'elle subit.

Dans tout le problème, l'air sera considéré comme un fluide incompressible de masse volumique ρ en écoulement stationnaire sur lequel la pesanteur aura une influence négligeable. Sauf indication contraire, ce fluide sera supposé parfait.

Les obstacles solides introduits dans cet écoulement seront à géométrie cylindrique (de base a priori quelconque), avec des génératrices parallèles à l'axe Oz perpendiculaire au plan de figure Oxy . On se limitera à une étude bidimensionnelle dans ce plan, les phénomènes étant supposés invariants par translation selon Oz.



$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ désignera la base orthonormée directe associée au repère Oxyz.

Les coordonnées cylindriques d'axe polaire Oz seront notées r , θ et z avec Ox pour origine des angles.

L'écoulement du fluide en un point M sera décrit par sa vitesse eulérienne $\vec{v}(M)$.

0. Etude cinématique de deux écoulements particuliers.

0. 1. Ecoulement tourbillonnaire.

On considère un écoulement orthoradial d'axe polaire Oz appelé tourbillon tel que

pour r < a, $\overrightarrow{rot}[\vec{v}(M)] = \gamma.\vec{e}_z$ où est une constante algébrique.

pour r >a, $\overrightarrow{rot}[\vec{v}(M)] = \vec{O}$.

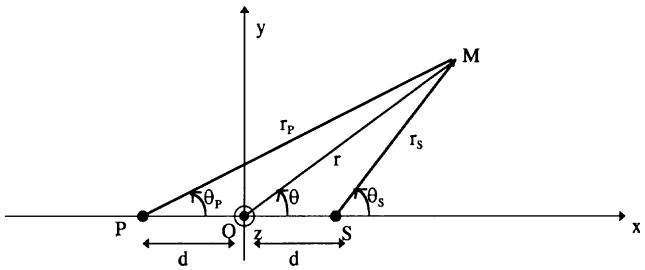
Ce tourbillon est dit ponctuel dans le plan Oxy si l'on considère que si $a \to 0$ et $\gamma \to \infty$, le produit $\pi a^2\gamma$ demeure égal à la valeur finie Γ que l'on nomme intensité du tourbillon.

Etablir l'expression de $\vec{v}(M)$ en coordonnées polaires (r >a) avec Γ comme paramètre.

A quelle distribution électromagnétique peut-on éventuellement comparer cet écoulement ?

0.2. Ecoulement d'un doublet

On considère un écoulement engendré par un doublet résultant de l'association d'une source et d'un puits.



a. La source se situe le long de l'axe Sz, parallèle à Oz tel que le point S, placé dans le plan Oxy, ait pour coordonnées (d>0, 0). L'écoulement s'effectue radialement de façon homogène avec un débit volumique par unité de longueur D. L'exemple d'un tel écoulement pourrait être donné par un fin tuyau poreux dans lequel on ferait circuler de l'eau sous pression.

Etablir l'expression de la vitesse $\vec{v}_S(M)$ du fluide en coordonnées cylindriques (r_s, θ_s, z) d'axe polaire Sz ainsi que le potentiel $\varphi_s(M)$ associé défini par $\vec{v}_S(M) = \overrightarrow{grad}[\varphi_S(M)]$

b. Le puits se situe le long de l'axe Pz, parallèle à Oz tel que le point P situé dans le plan Oxy ait pour coordonnées (-d, 0). Dans ce puits, le fluide arrive avec une répartition radiale uniforme dont le débit volumique par unité de longueur est également D.

Donner sans démonstration l'expression de la vitesse $\vec{v}_P(M)$ du fluide en coordonnées cylindriques (r_p, θ_p, z) d'axe polaire Pz ainsi que le potentiel $\varphi_P(M)$ associé.

c. Soit $\varphi(M)$ le potentiel des vitesses dans le cas où l'on associe la source et le puits pour former un doublet pour lequel $d \to 0$ et $D \to \infty$ de sorte que le produit 2Dd demeure égal à la valeur finie H que l'on nommera intensité du doublet.

En coordonnées cylindriques (r, θ) d'axe polaire Oz, montrer que $j(M) = -\frac{H}{2p}\frac{\cos q}{r}$.

En déduire l'expression en coordonnées cylindriques de la vitesse $\vec{v}(M)$ créée par ce doublet avec H comme paramètre.

d. A quelle distribution électromagnétique peut-on éventuellement comparer cet écoulement ?

Dans la suite le paramètre H sera considéré comme une grandeur algébrique, c'est à dire que les positions du puits et de la source pourront être inversées.

1. Ecoulement autour d'un cylindre en rotation.

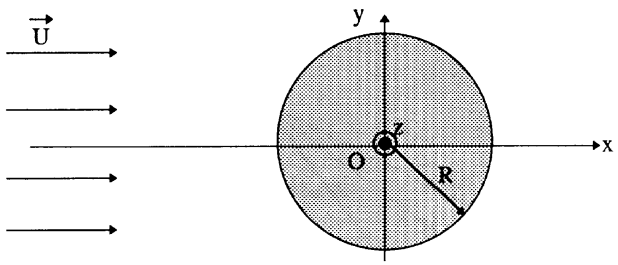
Un cylindre à base circulaire de rayon R et en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour de son axe Oz est placé dans l'air dont l'écoulement loin de cet obstacle se fait à la vitesse uniforme $\vec{U} = U\vec{e}_x$ et à la pression P_0.

Pour étudier l'effet du cylindre sur le fluide nous utiliserons une méthode de superposition qui consiste à introduire à l'intérieur de l'obstacle des singularités telles que son contour soit une ligne de courant de l'écoulement. Ces singularités sont les suivantes :

Un doublet d'axe Oz et d'intensité H qui engendre un champ de vitesse $\vec{v}_D(M)$

Un tourbillon également d'axe Oz et d'intensité Γ qui engendre un champ de vitesse $\vec{v}_T(M)$

On pose alors $\vec{v}(M) = \vec{v}_T(M) + \vec{v}_D(M) + \vec{U}$ en tout point M de l'écoulement.



1. 1. Etude cinématique.

Les coordonnées polaires de la vitesse $\vec{v}$ de cet écoulement ont pour expression :

$$v_r = U(1-\frac{R^2}{r^2})\cos q \qquad v_q = -U(1+\frac{R^2}{r^2})\sin q + \frac{\Gamma}{2pr}$$

a. En s'appuyant sur des résultats établis précédemment, justifier ces expressions en explicitant le paramètre H en fonction de R et de U.

b. Donner en quelques lignes les raisons de l'introduction du tourbillon et du doublet dans la singularité modélisant l'effet du cylindre en rotation sur l'écoulement du fluide.

Le modèle d'écoulement proposé permet-il de relier quantitativement Γ à la vitesse angulaire ω du cylindre ?

1.2. Mise en mouvement de l'air par le cylindre.

Le cylindre est initialement immobile dans l'air. On le soumet alors à une accélération angulaire pour lui communiquer finalement la vitesse angulaire constante ω et arriver au régime d'écoulement décrit ci-dessus.

Cela est-il compatible avec les hypothèses précédentes sur l'air ? Expliquer.

1.3. Etude dynamique.

On donne ci-dessous le tracé des lignes de courant pour des valeurs particulières de U, R et Γ.

a. Comparer qualitativement le module v de la vitesse $\vec{v}$ du fluide pour les points situés sur l'axe Oy selon que y > R ou y < -R.

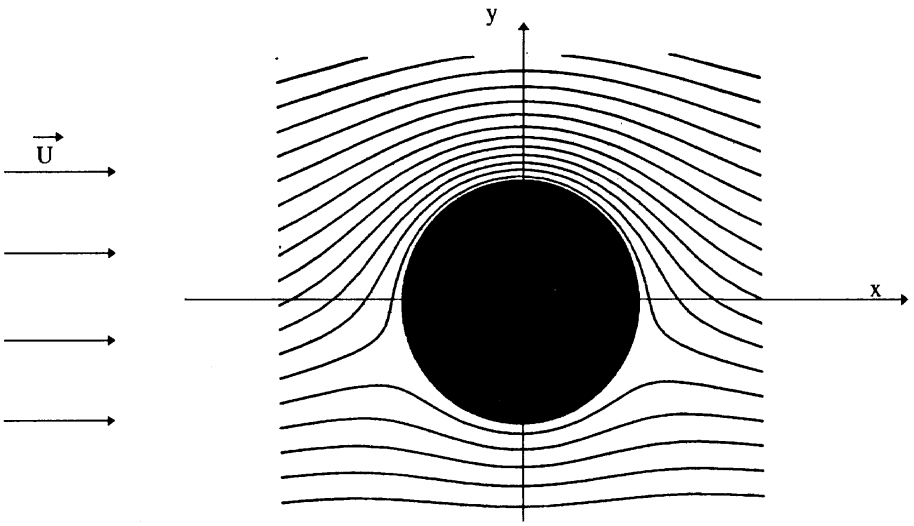
b. Indiquer le signe de Γ et préciser si le sens de rotation du cylindre est horaire ou antihoraire .
c. En exploitant le tracé ci-dessus, justifier l'existence de points d'arrêt du fluide à la surface du cylindre. Donner $|\Gamma|$ en fonction des paramètres U, R et du sinus d'un angle géométrique θ_a dont on précisera dans ce cas la valeur numérique approchée en degrés (< 90°).

d. Soit $\vec{F}$ la résultante de l'action de l'air sur le cylindre.
Donner, sans calcul mais en les justifiant, la valeur de la composante F_x et celle du moment par rapport à l'axe Oz de cette action. La réalité confirme-t-elle ce résultat ?

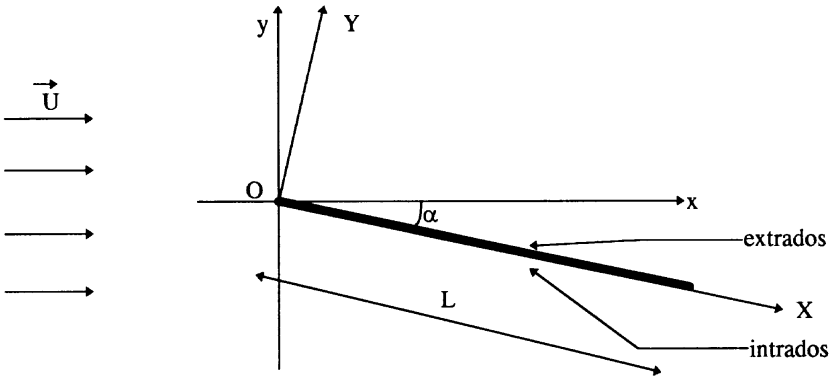
e. Exprimer la pression $P(\theta)$ à la surface du cylindre avec U, ρ, R, Γ et P_0 comme paramètres.

f. Le cylindre ayant une hauteur h, établir l'expression de la composante F_y de $\vec{F}$ en fonction de ρ, U, Γ et h, puis de ρ, U, R, $\sin\theta_a$ et h . Commenter en précisant les applications envisageables.
Donner une valeur approchée de F_y pour les valeurs numériques suivantes : U = 15 ms^{-1} , R= 1 m, h=3m et ρ= 1,3 $kg.m^{-3}$.

g. Comment les lignes de courant sont-elles modifiées si l'on prend en compte la viscosité η de l'air qui est de l'ordre 10^{-5} Pl ? Quel paradoxe lève-t-on ?



2. Ecoulement de l'air autour d'une aile modélisée.
On remplace le cylindre par une aile d'avion que l'on modélise par une plaque rectangulaire de largeur L que l'on appelle corde et de profondeur h que l'on appelle envergure. Cette plaque présente un angle de cabrage α, angle géométrique positif dont la valeur sera toujours considérée comme faible. Les résultats littéraux seront simplifiés en tenant compte de cette hypothèse.
L'épaisseur a de cette plaque est négligeable.
La face supérieure de la plaque s'appelle l'extrados et la face inférieure l'intrados.



L'étude cinématique est analogue à celle de la partie 1 en introduisant une singularité de type tourbillonnaire sur la plaque. Cette singularité est définie par $\overrightarrow{rot}[\vec{v}(M)] = w(X).\vec{e}_Z$ de sorte que le produit aw(X) demeure fini et égal à $\gamma(X)$ quand on suppose a infiniment petite.
On obtient ainsi dans le plan de figure une nappe tourbillonnaire à intensité répartie sur une longueur L le long de l'axe OX.
Si l'on désigne par $\vec{v}_T(M)$ la vitesse de l'air autour de l'aile engendrée par le tourbillon, alors la vitesse de l'écoulement a pour expression $\vec{v}(M) = \vec{v}_T(M) + \vec{U}$.

Une investigation plus approfondie permet d'aboutir à $\gamma(X) = -2U\alpha\sqrt{\dfrac{L-X}{X}}$

Donnée complémentaire : $\displaystyle\int_0^L \sqrt{\frac{L-x}{x}}\,dx = \frac{\pi L}{2}$

2. 1. La singularité tourbillonnaire évoque une analogie avec la magnétostatique.

Illustrer par un dessin et sans faire de calcul le champ magnétique $\vec{B}$ à produit par une nappe surfacique plane de courant uniforme. Quelle est la symétrie de ce champ magnétique ? Quelle est sa discontinuité à la traversée de la nappe de courant ?

Quelle symétrie présente le champ des vitesses $\vec{v}_T(M)$ par rapport au plan OXZ ? Quelle est sa discontinuité à la traversée de la singularité tourbillonnaire ?

2.2. Si l'on note $v_{T,t,e}(X)$ la composante tangentielle (indice t) sur le vecteur de base $\vec{u}_X$ de $\vec{v}_T(M)$ à la surface de l'extrados (indice e) donner en fonction de $v_{T,t,e}(X)$ et en utilisant la symétrie de ce champ des vitesses, l'expression de la composante tangentielle $v_{T,t,i}(X)$ de $\vec{v}_T(M)$ sur $\vec{u}_X$ à la surface de l'intrados (indice i).

2.3. De la discontinuité du champ des vitesses, déduire $v_{T,t,e}(X)$ et $v_{T,t,i}(X)$ en fonction de $\gamma(X)$.

2.4. Donner les composantes tangentielles $v_{t,e}(X)$ et $v_{t,i}(X)$ de la vitesse totale de l'écoulement de l'air à la surface respectivement de l'extrados et de l'intrados en fonction de U et $\gamma(X)$. Exprimer en fonction de U et α les composantes normales $v_{T,n,e}(X)$ et $v_{T,n,i}(X)$ de $\vec{v}_T(M)$ sur $\vec{u}_Y$ au niveau de l'extrados et de l'intrados.

2.5. Tracer pour X variant de 0 à L l'allure des courbes représentatives de $v_{T,t,e}(X)$ et $v_{T,t,i}(X)$. Préciser notamment l'existence éventuelle de points d'arrêt et donner s'il y a lieu leurs abscisses X_{ae} et X_{ai}.

2.6. On donne ci-dessous la reproduction d'une photographie des lignes de courant d'un écoulement d'huile autour d'un profil d'aile présentant un angle de cabrage de 13°.
Commenter cette photographie en se référant à l'étude théorique précédente.

2.7. Exprimer les pressions $P_e(X)$ et $P_i(X)$ au niveau de l'extrados et de l'intrados en fonction de U, ρ, $\gamma(X)$ et P_0.

2.8. Exprimer la composante F_y de la résultante de l'action de l'air sur l'aile en fonction de h, U, ρ, et $|\Gamma| = \int_0^L |g(X)| dX$, puis finalement en fonction de h, U, ρ, L et α. Comparer au résultat obtenu pour le cylindre.

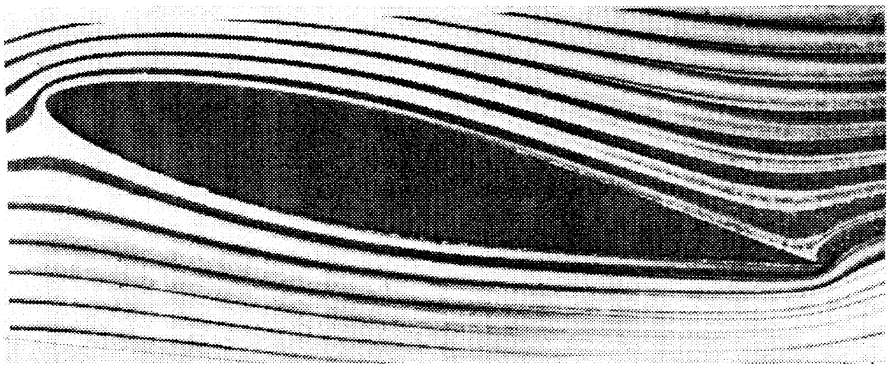
2.9. Application.

Un petit avion possède une masse totale m de 700 kg. On suppose que la portance s'exerce uniquement sur les ailes dont l'envergure est h = 5 m et la corde L = 1, 5 m. L'angle de cabrage α vaut 12°.

Quelle doit être la vitesse minimale (en km/h) de l'avion au décollage ?

On prendra g = 9,8 ms^{-2} et on rappelle que ρ= 1,3 $kg.m^{-3}$ pour l'air.

2. 10. Dans la réalité, les résultats précédents sont bien vérifiés pour des angles de cabrage inférieurs à 16°. Au delà, on constate une diminution brutale de Fy. Interpréter.



Mécanique des fluides

0- Etude cinématique de deux écoulements particuliers

0.1 Ecoulement tourbillonnaire

Ecoulement orthoradial donc $\vec{v} = v_\theta \vec{e}_\theta$.

Pour r > a, on calcule la circulation du vecteur vitesse sur une ligne de courant (cercle de centre O et de rayon r)

$\oint \vec{v}.d\vec{l} = 2\pi r v = \iint \vec{rot}\,\vec{v}.d\vec{S} = \gamma\pi a^2$ d'où $\boxed{\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r}\vec{e}_\theta}$ avec $\underline{\Gamma = \gamma\pi a^2}$

Distribution électromagnétique : champ magnétique créé par un fil infini rectiligne de section un disque de rayon a et parcouru par une intensité constante.

(Rmq : c'est aussi un champ à divergence nulle)

0.2 Ecoulement d'un doublet

a. Etude de la source seule S

Ecoulement radial : $\vec{v}_S = v_{rS}\vec{e}_{rS}$.

Calcul du débit volumique par unité de longueur: $D = 2\pi r_S v$ d'où $\boxed{\vec{v}_S(M) = \frac{D}{2\pi r_S}\vec{e}_{rS}}$

Potentiel $\varphi_S(M)$: $\vec{v}_S(M) = \vec{grad}\left(j_S(M)\right)$ d'où $\boxed{j_S(M) = \frac{D}{2\pi}\ln(r_S) + cst}$

b. Etude du puits

$\boxed{\vec{v}_P(M) = \frac{-D}{2\pi r_P}\vec{e}_{rP}}$ et $\boxed{j_P(M) = -\frac{D}{2\pi}\ln(r_P) + cst'}$

c. Association du puits et de la source

Superposition des écoulements : $\varphi(M) = \varphi_S(M) + \varphi_P(M)$.

On choisit l'origine des potentiels en O soit cst + cst' = 0.

D'où $\boxed{j(M) = \frac{D}{2\pi}\ln\left(\frac{r_S}{r_P}\right)}$

or $r_S = r\left(1 - \frac{2d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{r^2}\right)^{1/2}$ et $r_P = r\left(1 + \frac{2d}{r}\cos\theta + \frac{d^2}{r^2}\right)^{1/2}$

d'où avec des DL au 1er ordre, $\ln\left(\frac{r_S}{r_P}\right) = -\frac{2d}{r}\cos\theta$

d'où $\boxed{j(M) = -\frac{Dd}{\pi r}\cos\theta \quad \text{ou} \quad j(M) = -\frac{H}{2\pi r}\cos\theta}$ avec $\underline{H = 2Dd}$

Vitesse en coordonnées cylindriques : $\vec{v}(M) = \vec{grad}\, j(M)$

d'où : $\boxed{\vec{v}(M) = \begin{cases} \frac{\partial j}{\partial r} = \frac{H.\cos\theta}{2\pi r^2} \text{ selon } \vec{e}_r \\ \frac{1}{r}.\frac{\partial j}{\partial \theta} = \frac{H.\sin\theta}{2\pi r^2} \text{ selon } \vec{e}_\theta \\ \frac{\partial j}{\partial z} = 0 \text{ selon } \vec{e}_z \end{cases}}$

d. Comparaison avec une distribution électromagnétique : champ électrostatique créé par un doublet filiforme de charges linéiques λ et $-\lambda$.

1- Ecoulement autour d'un cylindre en rotation

1.1 Etude cinématique

a. Justifier ces expressions

Superposition des trois écoulements, d'où $\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r}\vec{e}_\theta + \frac{H\cos\theta}{2\pi r^2}\vec{e}_r + \frac{H\sin\theta}{2\pi r^2}\vec{e}_\theta + U\vec{e}_x$

Avec $\vec{e}_x = \cos\theta.\vec{e}_r - \sin\theta.\vec{e}_\theta$, on a : $\boxed{\vec{v} = \begin{cases} U\left(1+\dfrac{H}{2\pi Ur^2}\right)\cos\theta \text{ selon } \vec{e}_r \\ -U\left(1-\dfrac{H}{2\pi Ur^2}\right)\sin\theta + \dfrac{\Gamma}{2\pi r} \text{ selon } \vec{e}_\theta \end{cases}}$

On retrouve les expressions proposées en posant : $\boxed{R^2 = -\dfrac{H}{2\pi U}}$

b. Interprétation du modèle avec respect des conditions limites

Le tourbillon tient compte de la rotation du cylindre dans un fluide au repos très loin du cylindre.

Le doublet modélise l'écoulement du fluide autour du cylindre fixe.

Vitesse angulaire : la vitesse (orthoradiale) d'un point à la surface du cylindre est la même que celle de la couche de fluide en contact avec l'écoulement dû au tourbillon, d'où :

- vitesse d'un point à la surface du cylindre : $v = R\omega$

- vitesse orthoradiale de l'écoulement tourbillonnaire : $v = \dfrac{\Gamma}{2\pi R}$

d'où $\boxed{\omega = \dfrac{\Gamma}{2\pi R^2}}$

1.2 Mise en mouvement de l'air par le cylindre

La mise en mouvement du cylindre est impossible si le fluide est parfait ou non visqueux.

1.3 Etude dynamique

a. Comparer la vitesse

Le fluide est incompressible, donc le vecteur vitesse est à flux conservatif.

Les lignes de champ sont plus resserrées pour y > R que pour y < -R, donc la vitesse dans le domaine y > R est supérieure à celle du domaine y < - R , soit $\boxed{|v|(y>R) > |v|(y<-R)}$.

b. Signe de Γ et sens de rotation du cylindre

On a en $\theta = \pi / 2$: $v(y>R) = U\left(1+\dfrac{R^2}{r^2}\right) - \dfrac{\Gamma}{2\pi r}$

et en $\theta = -\pi / 2$: $v(y<-R) = U\left(1+\dfrac{R^2}{r^2}\right) + \dfrac{\Gamma}{2\pi r}$

Pour respecter la condition du a), Γ doit être négatif. Alors le cylindre tourne dans le sens horaire.

c. Existence de points d'arrêt et position

L'observation du tracé fait apparaître 2 points d'arrêt.du fluide à la surface du cylindre (ce qui n'est pas toujours le cas) pour -30° et -150°.

Pour r = R et $v_\theta = 0$, on a : $\boxed{|\Gamma| = 4\pi UR\sin\theta_a}$ avec θ_a = 30°

d. Composante F_x et moment par rapport à l'axe Oz

Du fait de la symétrie de la figure par rapport à l'axe des ordonnées (Oy), on peut associer à chaque force élémentaire dF_x agissant en M (r = R, θ) la force élémentaire $-dF_x$ agissant en M' (r = R, $\pi - \theta$).

D'où la composante sur l'axe Ox de la résultante de l'action de l'air sur le cylindre est nulle : $\boxed{F_X = 0}$

Même raisonnement pour les moments qui s'annulent deux à deux.(paradoxe de d'Alembert)

e. Pression à la surface du cylindre

Utilisation du théorème de Bernoulli sur une ligne de courant entre un point à l'infini et un point à la surface du cylindre à z=cst : $P_0 + \dfrac{\rho U^2}{2} = P(\theta) + \dfrac{\rho}{2}\left(\dfrac{\Gamma}{2\pi R} - 2U\sin\theta\right)^2$

soit $\boxed{P(\theta) = P_0 + \dfrac{\rho}{2}\left[U^2 - \left(\dfrac{\Gamma}{2\pi R} - 2U\sin\theta\right)^2\right]}$

f. Composante F_y

On a : $\vec{dF} = -P(\theta).dS.\vec{e}_r$ avec dS = hR.dθ.

$dF_y = \vec{dF}.\vec{e}_y$ soit $dF_y = -P(\theta).R.h.\sin\theta.d\theta$ d'où par intégration $F_y = Rh\int_0^{2\pi} P(\theta).\sin\theta.d\theta$

d'où $\boxed{F_y = -\rho U h \Gamma}$ ou $\boxed{F_y = 4\pi\rho h R U^2 \sin\theta_a}$ (ici $\Gamma < 0$, la force est dirigée vers les y croissants)

Applications : effet Magnus (effet lifté ou coupé très utilisé par les sportifs ! ! !)

AN : $F_y = 5513\ N$

g. Viscosité du fluide

0n peut calculer le nombre de Reynolds (environ 10^6).

Pour un faible nombre de Reynolds, il a formation d'une couche limite laminaire. Lorsque celui-ci augmente, la couche limite se décolle avec formation de tourbillon. Le régime devient turbulent.

On lève le paradoxe de d'Alembert.

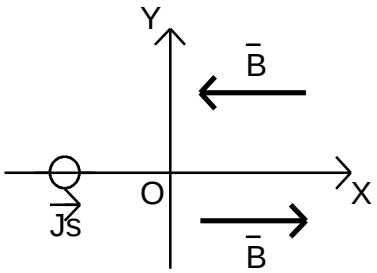
2 - Ecoulement de l'air autour d'une aile modélisée

2.1 Analogie avec la magnétostatique

symétrie impaire

discontinuité : $\boxed{\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{n}_{1\to 2}}$ avec $\vec{n}_{1\to 2}$ normale à la surface orientée de 1 vers 2.

Le champ magnétique et le champ des vitesses vérifient les mêmes équations différentielles (divergence et rotationnel). Ce sont deux champs antisymétriques.



Donc une analogie de solution est possible.

Le champ des vitesses présente une symétrie impaire.

On peut aussi écrire : $\boxed{\vec{v}_{T2} - \vec{v}_{T1} = a\vec{\omega} \wedge \vec{n}_{1\to 2}}$ ou $\boxed{\vec{v}_{T2} - \vec{v}_{T1} = -\gamma(X)\vec{e}_X \quad (1)}$

2.2 Composante tangentielle $v_{T,t,i}(X)$

Par antisymétrie : $\boxed{v_{T,t,i}(X) = -v_{T,t,e}(X)}$

2.3 $v_{T,t,e}(X)$ et $v_{T,t,i}(X)$ en fonction de $\gamma(X)$

A l'aide de l'équation (1) : $v_{T,t,e} - v_{T,t,i} = -\gamma(X)$, on a : $\boxed{v_{T,t,e} = -\frac{\gamma(X)}{2} \text{ et } v_{T,t,i} = \frac{\gamma(X)}{2}}$

2.4 $v_{t,e}(X)$ et $v_{t,i}(X)$ en fonction de U et de $\gamma(X)$

On a : $\vec{U} = U.\cos\alpha.\vec{e}_X + U.\sin\alpha.\vec{e}_Y$ d'où $\begin{cases} v_{t,e}(X) = -\frac{\gamma(X)}{2} + U\cos\alpha \\ v_{t,i}(X) = \frac{\gamma(X)}{2} + U\cos\alpha \end{cases}$.

Or α est petit, donc ces résultats deviennent : $\boxed{\begin{cases} v_{t,e}(X) = -\frac{\gamma(X)}{2} + U \\ v_{t,i}(X) = \frac{\gamma(X)}{2} + U \end{cases}}$

Composantes normales de la vitesse de la nappe tourbillonnaire

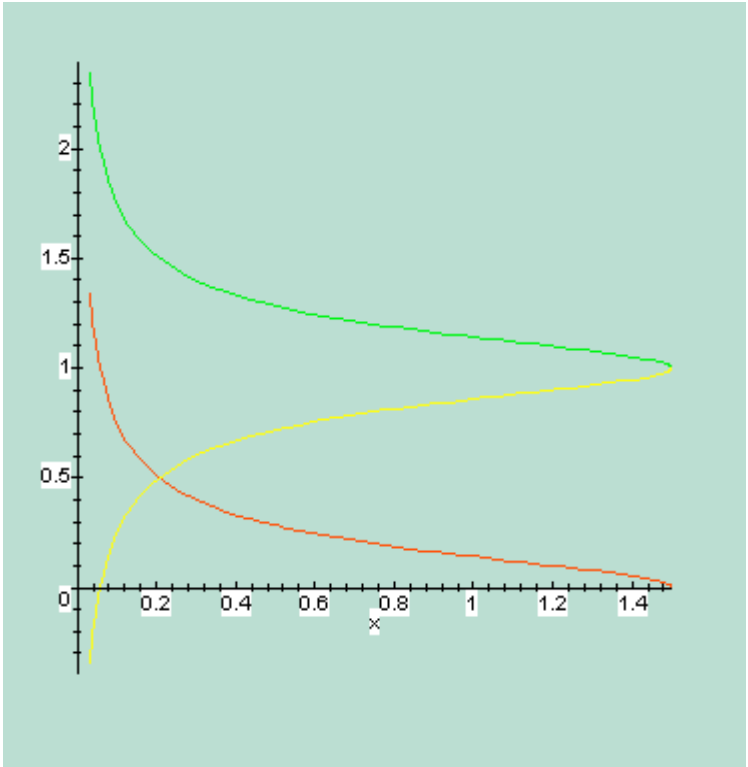
Les composantes normales de la vitesse totale sont nulles (le fluide ne peut pas traverser la plaque), donc

$v_{n,e}(X) = 0$ et $v_{n,i}(X) = 0$ or $\begin{cases} v_{n,e}(X) = v_{T,n,e}(X) + U\sin\alpha \\ v_{n,i}(X) = v_{T,n,i}(X) + U\sin\alpha \end{cases}$ d'où $\boxed{\begin{cases} v_{T,n,e}(X) = -U\alpha \\ v_{T,n,i}(X) = -U\alpha \end{cases}}$

2.5 Allure des courbes

On a : $v_{T,t,e} = Ua\sqrt{\frac{L-X}{X}}$ et $v_{T,t,i} = -Ua\sqrt{\frac{L-X}{X}}$.

La représentation de $v_{T,t,e}(X)$ ou $v_{T,t,i}(X) = -v_{T,t,e}(X)$ a assez peu d'intérêt (courbe rouge).
La courbe verte $v_{t,e}(X)$ montre l'absence de point d'arrêt pour l'extrados.
La courbe jaune $v_{t,i}(X)$ montre l'existence d'un point d'arrêt pour l'intrados.
(Courbes représentées avec : L = 1,5 m, α = 0, 2 (soit 12°) et U = 1).



Points d'arrêt :
$v_{t,e}(X_{ae}) = 0$ donne $\gamma(X) = 2U$: cette équation ne présente aucune solution physiquement acceptable. Il n'y a donc pas de point d'arrêt sur l'extrados.

$v_{t,i}(X_{ai}) = 0$ donne $\gamma(X_{ai}) = -2U$ soit $\sqrt{\frac{L-X_{ai}}{X_{ai}}} = \frac{1}{a}$

d'où $X_{ai} = \frac{L}{1+\frac{1}{a^2}}$. Comme α est petit, $\boxed{X_{ai} \approx La^2}$

2.6 Commentaire de la photographie
On observe bien le point d'arrêt de l'intrados et pas sur l'extrados.
Sur l'extrados, la vitesse diminue losque X augmente (les lignes de courant s'écartent).
Sur l'intrados, après le point d'arrêt, la vitesse augmente lorsque X augmente.
Problème en X = L : les deux vitesses ne convergent pas vers la même valeur U.
2.7 Expressions des pressions
Au niveau de l'extrados : utilisation du théorème de Bernoulli sur une ligne de courant :

$P_0 + \frac{\rho U^2}{2} = P_e(X) + \frac{\rho}{2}\left(U - g(X)/2\right)^2$ soit $\boxed{P_e(X) = P_0 + \frac{\rho}{2}\left(Ug(X) - g^2(X)/4\right)}$

Au niveau de l'extrados : utilisation du théorème de Bernoulli sur une ligne de courant :

$P_0 + \frac{\rho U^2}{2} = P_i(X) + \frac{\rho}{2}\left(U + g(X)/2\right)^2$ soit $\boxed{P_i(X) = P_0 - \frac{\rho}{2}\left(Ug(X) + g^2(X)/4\right)}$

Remarque : On peut négliger le second ordre en γ.
2.8 Composante F_Y

On a $dF_Y = (p_i(X) - p_e(X)).h.dX$ soit $dF_Y = -r.U.\gamma(X).h.dX$

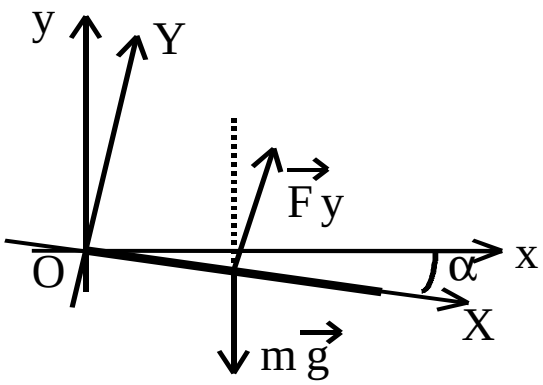
$\gamma(X)$ est négatif, donc $|\gamma(X)| = -\gamma(X)$ d'où $dF_Y = r.U.|\gamma(X)|.h.dX$ soit $\boxed{F_Y = rhU|\Gamma|}$

ou encore $\boxed{F_Y = \pi rhLaU^2}$ On obtient le même genre de réponse qu'avec le cylindre : même dépendance, seul un facteur de forme (coefficient numérique) change.

2.1 Application

Pour que l'avion décolle : $F_Y \cos\alpha > mg$

En négligeant le cosinus de l'angle α, on trouve : $\boxed{U > \sqrt{\frac{mg}{\pi rhLa}}}$

AN : U > 32,8 m/s ou U > 118 km/h

2.2 Interprétation : décollement de la couche limite.